数理解析研究所講究録
691巻 1989年 97-125

京都大学数理解析研究所講究録

水の波の線形問題について

電気通信大学電気通信学部情報工学科
牛島照夫 (USHIJIMA, Teruo)
松木美保子 (MATSUKI, Mihoko)
青木篤 (AOKI, Atsushi)

0．要旨

単連結有界水域における流速のポテンシャル関数に対する線形の初期値境界値問題を、静止水面上の二乗可積分関数の作るヒルベルト空間に値を取る二階線形定作用素係数発展問題として定式化する。有限要素近似による半離散近似問題と、対応する固有値問題の収束性と誤差評価についてこの定式化によって得られる結果をのべる。つづいて、時間変数を中心差分法で離散化した全離散近似スキームの安定条件、収束性及び誤差評価につき報告する。これらの解析の結果の妥当性を示す数値例の若干を最後に与える。

1．水の波の線形化問題（ＬＷＷ）

容器内に閉じ込められた水の運動を、無限小振幅仮定の下に解析するとき、次の線形初期値・境界値問題（ＬＷＷ）に出会う。
(Stoker[6] のChapter 1 参照）。

$$
(\mathrm{LWW})\quad
\begin{cases}
-\Delta\Phi = 0 & \text{in } \Omega, \\
\Phi_{tt} + g\,\partial\Phi/\partial n = F_t & \text{on } \Gamma_0, \\
\partial\Phi/\partial n = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\
\Phi(0,x,y,z) = \Phi^1(x,y,z) & \text{in } \Omega, \\
\Phi_t(0,x,y,z) = \Phi^0(x,y,z) & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

ここで、Ωは3次元空間内の（静止）水域であるか、又はその水域が一つの水平方向に対して一様であるときその方向に直交する水域の断面である。Γ_0 は水域が静止しているときの水面であり、Γ_1 は静止水域と接触する容器壁である。Φは水の速度のポテンシャル関数である。$\partial\Phi/\partial n$ はΩの境界における外向き法線微係数を、g は重力加速度を、それぞれ、表す。

外力Fが時間によらないとき、時間につき調和な（LWW）の解　：

$$\Phi(t,x,y,z) = \sin(\omega t)\,\phi(x,y,z)$$

を求めると、（LWW）は次の固有値問題（E）になる。

$$(\mathrm{E})\begin{cases} -\Delta\phi = 0, & \text{in } \Omega, \\ \partial\phi/\partial n = \lambda\phi, & \text{on } \Gamma_0, \quad (\lambda = \omega^2/g), \\ \partial\phi/\partial n = 0, & \text{on } \Gamma_1. \end{cases}$$

ここで、Ωは、Nečas[3]の意味で、リプシッツ連続な境界Γを持つR^N（N＝2，3）の有界領域とする。R^{N-1} の有界領域 Γ_0 はそのN－1次元測度が正であるとする。

$$X = L^2(\Gamma_0), \quad Y = H^{1/2}(\Gamma_0), \quad V = H^1(\Omega)$$

とし、V上のエルミート形式　$a(u,v)$, $b(u,v)$, $\langle\langle u, v\rangle\rangle$ とノルム $\|v\|$ を次のように定める。

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{v}\, dx, \quad b(u,v) = \int_{\Gamma_0} u\bar{v}\, d\Gamma,$$

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = a(u,v) + b(u,v), \quad \|v\| = \langle\langle v, v\rangle\rangle^{1/2}.$$

VからXへのトレース作用素をγ_0とする。γ_0は完全連続作用素であり、Γ_0の測度が正であることから、$V=H^1(\Omega)$の本来のノルム$\|v\|_{H^1(\Omega)}$と上に定めた$\|v\|$とは同値になる(Nečas[3])。

$$V_0=\{v\in V \ :\ v=0 \ \text{ on } \ \Gamma_0\}$$

として、内積《u, v》に関するVにおけるV_0の直交補空間をV_1とする。

2. $L^2(\Gamma_0)$における発展問題

任意の$\Phi\in Y$に対して次の弱形式問題(H_Φ)の解uは一意に存在して、V_1の元である。

$$(H_\Phi)\begin{cases} a(u, v)=0, & v\in V_0, \\ u=\Phi, & \text{on } \Gamma_0, \\ u\in V. & \end{cases}$$

$u=H\Phi$ によって定まる$L(Y, V_1)$の元Hを、ここでは、ポテンシャル作用素とよぶ。Hは、YをV_1の上に、1対1，両連続に写す。Yを定義域とするXにおける非負値エルミート形式 a_0を、

$$a_0(\Phi, \Psi) = a(H\Phi, H\Psi),\ \Phi, \Psi\in D(a_0)=Y,$$

によって定める。

Xで稠密な定義域D(A)をもつ非負値な自己共役作用素Aが存在して、

(1) $(A\Phi,\ \Psi) = a_0(\Phi,\ \Psi)$,

$\Phi \varepsilon D(A),\ \Psi \varepsilon D(a_0)$,

(2) $(A^{1/2}\Phi,\ A^{1/2}\Psi) = a_0(\Phi,\ \Psi)$,

$\Phi,\ \Psi \varepsilon D(A^{1/2}) = D(a_0)$,

(3) $D(A) = \{\Phi \varepsilon Y$：正数Cが存在して

$|a_0(\Phi,\ \Psi)| \leqq C|\Psi|$

が、全ての$\Psi \varepsilon Y$に対して成りたつ。$\}$,

であることがわかる(Kato[2])。ここで、$(\Phi,\ \Psi)$と$|\Psi|$は、それぞれ、$L^2(\Gamma_0)$での内積とノルムを表す。更に、

(4) $A\Phi=0$ と、ΦがΓ_0上で定数であることとは、同値,

(5) $(A+1)^{-1}$ は、X上の完全連続作用素,

(6) $\sigma(A) = \{\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \cdots \to \infty\}$,

であることがわかる。

初期データΦ^i (i=1,0) と非同次項$\Psi(t)$が、

$$\Phi^i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i \Phi_n \ . \qquad \Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)\Phi_n$$

とAの固有関数系で$L^2(\Gamma_0)$で完全正規直交系をなす

$\{\Phi_n : n=0,1,2,\cdots\}$:

$$A\Phi_n = \lambda_n \Phi_n, \quad (\Phi_n, \Phi_m) = \delta_{nm},$$

によって展開されるとき、次式によって与えられる $\Phi(t)$ を（ALWW）の一般化された解と呼ぶことにする。

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\Phi_n,$$

$$a_0(t) = a_0^1 + a_0^0 t + \int_0^t (t-s)b_0(s)ds,$$

$$a_n(t) = a_n^1 \cos(\sqrt{g\lambda_n}\, t) + a_n^0 (1/\sqrt{g\lambda_n}) \sin(\sqrt{g\lambda_n}\, t)$$

$$+ (1/\sqrt{g\lambda_n})\int_0^t \sin(\sqrt{g\lambda_n}(t-s))\, b_n(s)ds,$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

発展問題（LWW）は、次のXに値を取る二階線形定作用素係数発展問題（ALWW）として把握することができる。

$$(\mathrm{ALWW})\begin{cases} d^2\Phi/dt^2 + gA\Phi = \Psi(t), & t>0, \\ \Phi(0) = \Phi^1, \ d\Phi(0)/dt = \Phi^0. \end{cases}$$

固有値問題（E）は、次の固有値問題（AE）としてとらえられる。

$$(\mathrm{AE})\begin{cases} A\Phi = \lambda\Phi, \\ \{\lambda, \Phi\} \in R\times(D(A)-\{0\}). \end{cases}$$

3．有限要素近似問題

空間$V=H^1(\Omega)$の有限次元近似空間V_hが与えられているとする。近似空間V_hは定数関数を含むものとする。空間V_hのγ_0による像$\gamma_0(V_h)$をX_hとし、ヒルベルト空間$X=L^2(\Gamma_0)$から引きつがれた内積(Φ_h, Ψ_h) $(\Phi_h, \Psi_h \in X_h)$をもつヒルベルト空間と見なす。

X_hをXの近似空間と考える。$X_h \subset Y$である。

$$V_{0h} = V_h \cap V_0$$

とし、内積《u，v》の意味での直交分解：

$$V_h = V_{0h} + V_{1h}$$

を考慮する。

任意の$\Phi_h \in X_h$に対して次の弱形式問題$(H^h_{\Phi_h})$の解u_hは一意に存在して、V_{1h}の元である。

$$(H^h_{\Phi_h}) \begin{cases} a(u_h, v_h) = 0, & v_h \in V_{0h}, \\ u_h = \Phi_h, & \text{on } \Gamma_0, \\ u_h \in V_h. & \end{cases}$$

$u_h = H_h \Phi_h$によって定まる$L(X_h, V_{1h})$の元H_hを、ここでは、近似ポテンシャル作用素とよぶ。

H_hは、X_hをV_{1h}の上に、1対1、両連続に写す。

X_h を定義域とする X_h における非負値エルミート形式 a_h を、

$$a_h(\Phi_h, \Psi_h) = a(H_h\Phi_h, H_h\Psi_h), \Phi_h, \Psi_h \varepsilon X_h,$$

によって定める。

X_h で定義された非負値な有界自己共役作用素 A_h が存在して、

(7) $(A_h\Phi_h, \Psi_h) = a_h(\Phi_h, \Psi_h), \Phi_h, \Psi_h \varepsilon X_h,$

(8) $A_h\Phi_h = 0$ と、Φ_h が Γ_0 上で定数であることとは、同値、

(9) $\sigma(A_h) = \{\lambda_{h0} = 0 < \lambda_{h1} \leqq \lambda_{h2} \leqq \cdots \leqq \lambda_{hN_{1h}-1}\}$

であることがわかる。ここで、$N_{1h} = \dim X_h$ である。更に、

(10) $\lambda_{h1} \geqq \lambda_1 > 0$

が成立する。

空間 X^0 と X_h^0 を次のように定める。

$$X^0 = \{\Phi \varepsilon X : (\Phi, 1) = 0\}, \qquad X_h^0 = X_h \cap X^0.$$

作用素 P^0 及び P_h^0 をそれぞれ、X から X^0 への、及び X_h から X_h^0 への直交射影とすると、P^0 と P_h^0 はそれぞれ、A と A_h を約す。

$$A^0 = AP^0 \ (= P^0AP^0), \qquad A_h^0 = A_hP_h^0 \ (= P_h^0A_hP_h^0)$$

とおくと、

（１１）　A^0 はX^0 における正定値自己共役作用素、

（１２）　A_h^0 はX_h^0 における有界正定値自己共役作用素

である。

（ＬＷＷ）の弱形式表現を経由して、自然につぎのガレルキン近似問題（Π_h）が導出される。

$$
(\Pi_h)\begin{cases}
g\,a(\Phi_h(t),\ v_h) \\
\qquad = b(\{\Psi - \partial^2\Phi_h/\partial t^2\},\ v_h), \\
\qquad\qquad t>0,\ v_h \in V_h, \\
b(\Phi_h(0),\ v_h) \\
\qquad = b(\Phi^1,\ v_h),\quad v_h \in V_h, \\
b(\partial\Phi_h(0)/\partial t,\ v_h) \\
\qquad = b(\Phi^0,\ v_h),\quad v_h \in V_h.
\end{cases}
$$

同様に、固有値問題（Ｅ）のガレルキン式近似問題（E_h）が導びかれる：

$$
(E_h)\begin{cases}
a(\Phi_h,\ v_h) = \lambda_h\, b(\Phi_h,\ v_h),\ v_h \in V_h, \\
\{\lambda_h,\ \Phi_h\} \in R\times(V_h - \{0\}).
\end{cases}
$$

発展問題（Π_h）は、次のX_hに値を取る二階線形定作用素係数発展問題（$ALWW_h$）として把握することができる。

$$
(ALWW_h)\begin{cases} d^2\Phi_h/dt^2 + gA_h\Phi_h = \Psi_h(t),\ t>0, \\ \Phi_h(0) = \Phi_h^1,\quad d\Phi_h(0)/dt = \Phi_h^0. \end{cases}
$$

固有値問題（E_h）は、次の固有値問題（AE_h）としてとらえられる。

$$
(AE_h)\begin{cases} A_h\Phi_h = \lambda_h\Phi_h, \\ \{\lambda_h, \Phi_h\}\in R\times(X_h-\{0\}). \end{cases}
$$

4．半離散近似問題の収束性と誤差評価

正のパラメタ$h\in(0,\bar{h}]$（$\bar{h}<\infty$）に対して、Vの有限次元適合近似空間V_hの族$\{V_h: 0<h\le\bar{h}\}$が与えられているとする。近似空間V_hは定数空間を含むものとし、空間V_hのγ_0による像$\gamma_0(V_h)$をX_hとし、Xの近似空間と考える。次のような空間を準備する。すなわち、

$$
X^0 = \{\Phi\in X: (\Phi, 1)=0\},\qquad X_h^0 = X_h\cap X^0,
$$

$$
V^0 = \{v\in V: b(v, 1)=0\},
$$

$$
V_1^0 = V_1\cap V^0,\qquad V_{1h}^0 = V_{1h}\cap V^0
$$

と定める。このとき、$X_h^0 = \gamma_0(V_{1h}^0)$ である。

任意の$\Phi^0 \in X^0$に対して次の弱形式問題(G_Φ^0)の解u^0は一意に存在して、V_1^0の元である。

$$
(G_\Phi^0)\begin{cases} a(u^0, v) = \displaystyle\int_{\Gamma_0} \Phi^0 \,\overline{v}\, d\Gamma, \quad v \in V, \\ b(u^0, 1) = 0, \\ u^0 \in V. \end{cases}
$$

$u^0 = G\Phi^0$ によって定まる$L(X^0, V_1^0)$の元Gを、グリーン作用素とよぶ。

$$
(R) \qquad \Phi^0 \in Y \cap X^0 \text{ ならば、} G\Phi^0 \in H^2(\Omega),
$$

が成立するとき、「Gは性質（R）を持つ」と言うことにする。

Ωが２次元の凸多角形領域のとき、Gは性質（R）を持つ（渡辺二郎教授からの御教示による）。

Vの近似空間の族$\{V_h : 0 < h \leq \overline{h}\}$において、$R_h$を内積《$u, v$》に関する$V$から$V_h$への直交射影作用素とし、空間の近似能力に関する次の２条件を考える。

$$
(h-0) \qquad \lim_{h \to 0} \| R_h v - v \| = 0, \quad v \in V,
$$

$$(h-1)\begin{cases} v \in H^2(\Omega)\ \text{に対して、} \\ \qquad \| v - v_h \| \le C h \| v \|_{H^2(\Omega)} \\ \text{をみたす}\ v_h \in V_h\ \text{が存在する。ここで、}C\text{は}h\text{と}v\text{によらな} \\ \text{い定数である。} \end{cases}$$

<u>定理1.</u>　（ALWW）の一般化された解を$\Phi(t)$，（$ALWW_h$）の解を$\Phi_h(t)$とする。

1．（h－0）の下で、Φ^1，$\Phi^0 \in X$、$\Psi(t) \in C([0,T]:X)$ であれば、

$$\lim_{h \to 0} |\Phi(t) - \Phi_h(t)| = 0$$

が、$t \in [0,T]$ につき一様に成りたつ。

2．（h－1）の下で、Gが性質（R）を持つとき、

$1/2 \le s \le 3/2$ に対して、

$\Phi^1 \in D(A^{s+(1/2)})$，$\Phi^0 \in D(A^s)$，

$\Psi(t) \in C([0,T]:D(A^s))$

ならば、これらのデータとhとTによらない定数Cがあって、$0 \le t \le T$で、

$$|\Phi(t) - \Phi_h(t)|$$

$$\le C h^s (1+t) \{ |A^{s+(1/2)} \Phi^1| + |A^s \Phi^0| + t \max_{0 \le \tau \le t} |A^s \Psi(\tau)| \}.$$

実数sが　$0 \leqq s \leqq 1/2$　をみたしているとき、

$$\mathbf{X}^s = [H_0^{1/2}(\Gamma), L^2(\Gamma_0)]_{1-2s} \cap X^0$$

とおく。ここで　$[H^{1/2}(\Gamma_0), L^2(\Gamma_0)]_\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 1)$　は

Lions-Magenes[4]の定義による補間空間である。$-1/2 \leqq s \leqq 0$に対しては

$$\mathbf{X}^s = L(\mathbf{X}^{-s}, \mathbf{C})$$

とする。ただし　$\Psi^0 \in \mathbf{X}^0 = X^0$　を　$\mathbf{X}^s$　の元と見る同一視の方法は

$$\Psi^0(\Phi^0) = (\Phi^0, \Psi^0)_X, \quad \Phi^0 \in \mathbf{X}^{-s}$$

による。定理1の2は次の命題1より導かれる。

<u>命題1</u>　　Gは性質（R）を持ち、条件（h－1）が成立するものとする。

実数sとtは　$-1/2 \leqq s,\ t \leqq 1/2$　をみたすものとする。このとき、

1．$\mathbf{X}^{1/2} = Y^0$　上で定義された作用素　$(A^0)^{-1} - (A_h^0)^{-1} P_h^0$　は $\mathbf{X}^s$　から$\mathbf{X}^t$　への有界作用素に拡張される。

2．$\| (A^0)^{-1} - (A_h^0)^{-1} P_h^0 \|_{L(\mathbf{X}^s, \mathbf{X}^t)}$

$$\leqq C_{s,t} h^{s-t+1}$$

と評価される。ここに$C_{s,t}$　はhには依存しない定数である。

5．近似固有値問題の収束性と誤差評価

固有値問題（ＡＥ）の解 $\{\lambda, \Phi\}$ と、近似固有値問題（AE_h）の解 $\{\lambda_h, \Phi_h\}$ とを考察する。

$$\{\lambda_{h0}, \Phi_{h0}\} = \{\lambda_0, \Phi_0\} = \{0, m_{N-1}(\Gamma_0)^{-1/2}\}$$

であることに注意する。

定理２． （ｈ－０）の下で、ｎ＝１，２，・・・に対して

１．十分小さいｈ＞０に対して、$\lambda_{hn} \geqq \lambda_n$ であり、ｈ→０のとき、λ_{hn} は λ_n に収束する。更に、V_h が単調に増加してＶに近づくならば、λ_{hn} は単調に減少して λ_n に収束する。

２．λ_n が単純固有値であり、$(\Phi_n, \Phi_{hn}) \geqq 0$ であれば、

$$\lim_{h \to 0} \| \Phi_n - \Phi_{hn} \|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} = 0.$$

この定理の証明は Raviart-Thomas[7]の Chapitre 6 にある論法を参考にして与えることが出来る。

定理３． （ｈ－１）の下で、Ｇが性質（Ｒ）を持つとき、ｎ＝１，２，・・・に対して $\lambda_{n-1} < \lambda_n = \lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{n+m-1} < \lambda_{n+m}$ であるならば、

１．$\overline{\lambda}_{hn} = (1/m) \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_{h\, n+j}$ に対して、ｎによらない定数Ｃがあって、

$$|\lambda_n - \overline{\lambda}_{hn}| \leqq C h^2 .$$

2．(AE)の解$\{\lambda_n, \Phi_n\}$で$|\Phi_n|=1$をみたすものに対して

(AE_h)の解　$\{\lambda_{hn}, \Phi_{hn}\}$で$|\Phi_{hn}|=1$をみたし、

$$|\Phi_n - \Phi_{hn}| \leqq C h^{3/2}$$

をみたすものが存在する。

この定理の証明は、Bramble-Osborn[1] 及び[2] にならって行なうことができる。命題1が本質的である。

6．時間変数を中心差分近似した全離散近似問題とその安定条件

発展問題(ALWW)の半離散近似問題として、次のX_hに値を取る二階線形定作用素係数発展問題$(ALWW_h)$が設定される。

$$(ALWW_h)\begin{cases} d^2\Phi_h/dt^2 + gA_h\Phi_h \\ \qquad\qquad = \Psi_h(t),\quad t>0, \\ \Phi_h(0) = \Phi_h^1,\quad d\Phi_h(0)/dt = \Phi_h^0. \end{cases}$$

$(ALWW_h)$に対応して、中心差分全離散近似問題$(ALWW_{h,\tau})$が定まる。

$$(ALWW_{h,\tau})\begin{cases} D_{\tau\bar{\tau}}\Phi_{h,\tau,m} + gA_h\Phi_{h,\tau,m} = \Psi_{h,\tau,m}, \\ \qquad\qquad m=1,2,\ldots, \\ \Phi_{h,\tau,0} = \Phi_{h,\tau}^1,\quad D_\tau\Phi_{h,\tau,0} = \Phi_{h,\tau}^0. \end{cases}$$

ここで、$(\ell, m, n) = (m-1, m, m+1)$ として、次のような記法を用いている：

$$D_\tau \Phi_m = (\Phi_n - \Phi_m)/\tau, \qquad D_{\bar\tau} \Phi_m = (\Phi_m - \Phi_\ell)/\tau,$$

$$D_{\tau\bar\tau} \Phi_m = (\Phi_n - 2\Phi_m + \Phi_\ell)/(\tau^2).$$

次のような記法を導入する。 $\mathbf{X} = X^0$, $\mathbf{X}_h = X^0_h$,

$\mathbf{A} = gA^0$, $\mathbf{A}_h = gA^0_h$, $\Phi_0 = m_{N-1}(\Gamma_0)^{-1/2}$ とおくと

$$X \ni \Phi = a\Phi_0 + P^0\Phi, \ a \in \mathbb{C}$$

と一意に分解されるが、これを $\Phi = a\Phi_0 + \phi$ のように表す。

平行して

$$X_h \ni \Phi_h = a_h \Phi_0 + P^0_h \Phi_h = a_h \Phi_0 + \phi_h$$

のように表す。$i = 1, 0$ に対して

$$\phi^i = P^0 \Phi^i, \quad \phi^i_h = P^0_h \Phi^i_h, \quad \phi^i_{h,\tau} = P^0_h \Phi^i_{h,\tau}$$

$$\phi_{h,\tau,m} = P^0_h \Phi_{h,\tau,m}, \quad \phi_{h,\tau,m} = P^0_h \Psi_{h,\tau,m}$$

とする。 対応して

$$\Phi^i = a^i \Phi_0 + \phi^i, \cdots$$

等を使用する。 (6) と (9) と (10) により

(13) $\mathbf{A} \geq g\lambda_1 > 0$, $\mathbf{A}_h \geq g\lambda_1 > 0$

である。

以下では、V_h はラグランジ補間多項式によって生成される有限要素空間とする。我々は

(Ω)　Ωは多面体領域とする、

(T)　$\{\mathbb{T}_h\}_{0<h\leq\bar{h}}$ をΩの単体分割の族で準一様かつ逆仮定をみたすものとする、

なる二つの仮定を要請し、　$k\in\mathbb{N}$　を固定して、

(14)　$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h\big|_T \in \mathbb{P}_k,\ T\in\mathbb{T}_h\}$

とおく。　$\mathbb{P}_k$ は高々k次の多項式の全体とする。　このとき、

(15)　条件（h－1）がみたされる、

ことはよく知られている。（例えば[7] Chapitre　4）．

<u>命題2.</u>　　あるα＞0があって、（7）で定めたA_h に対して

(16)　$\|A_h\|_{L(X_h)} \leq \alpha/h,\quad h\in(0,\bar{h}]$

が成立する。

<u>命題2の証明の概略</u>

$V_h = \{\{w_j : 1\leq j\leq N_{0h}+N_{1h}\}\}$,

$X_h = \{\{\omega_j = \gamma_0 w_{N_{0h}+j} : 1\leq j\leq N_{1h}\}\}$

のように　V_h の基底 $\{w_j\}_{1\leq j\leq N_h}$　$(N_h = N_{0h} + N_{1h})$ と

X_h の基底 $\{\omega_j\}_{1\leq j\leq N_{1h}}$ を固定する。

$-\Delta$の離散表現を

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{ij})_{1\leqq i,j\leqq N_h} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\alpha}_0 & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \hline \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, N_{0h} \\ \}\, N_{1h} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{N_{0h}} & \underbrace{\quad}_{N_{1h}} \end{array} & \end{array} ,$$

$$\alpha_{i,j} = a(w_j, w_i), \quad 1 \leqq i, j \leqq N_h$$

とする。$\Phi_h \varepsilon X_h$ は 上の基底により

$$\Phi_h = \sum_{j=1}^{N_{1h}} \Phi_{N_{0h}+j}\, \omega_j$$ とあらわせる。

$$\phi_h = \sum_{j=1}^{N_{1h}} \Phi_{N_{0h}+j}\, w_j$$ とすると $\gamma_0(\phi_h) = \Phi_h$

である。

ϕ_h に対応させて

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_j)_{1 \leqq j \leqq N_h},$$

$$\Phi_j = 0, \quad 1 \leqq j \leqq N_{0h},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = (\Phi_{N_{0h}+j})_{1 \leqq j \leqq N_{1h}}$$

とおく。

$$(A_h \Phi_h, \Phi_h)_X = (\mathbf{a}\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_1)_{\mathbb{C}^{N_{1h}}}$$

である。

ここで

$$a = \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_0^{-1} \alpha_1^T$$

であり、α_0^{-1} は正定値であるから

$$(A_h \Phi_h, \Phi_h)_X \leq (\alpha_2 \Phi_1, \Phi_1)_{\mathbb{C}^{N_{1h}}}$$

$$= (\alpha \Phi, \Phi)_{\mathbb{C}^{N_h}} = \| \nabla \phi_h \|^2_{L(\Omega)} .$$

したがって

$$\frac{(A_h \Phi_h, \Phi_h)}{| \Phi_h |^2} \leq \frac{\| \nabla \phi_h \|^2_{L^2(\Omega)}}{| \Phi_h |^2_{L^2(\Gamma_0)}} .$$

$$\therefore \frac{(A_h \Phi_h, \Phi_h)}{| \Phi_h |^2} \leq \frac{\| \nabla \phi_h \|^2_{L^2(\Omega)}}{\| \phi_h \|^2_{L^2(\Omega)}} \frac{\| \phi_h \|^2_{L^2(\Omega)}}{| \Phi_h |^2_{L^2(\Gamma_0)}} .$$

分割が準一様かつ逆仮定をみたすことから

$$(\beta_0) \quad \beta_0 > 0, \quad \| \nabla \phi_h \|_{L^2(\Omega)} \leq \beta_0 / h \| \phi_h \|_{L^2(\Omega)} ,$$

$$\phi_h \in V_h , \quad h \in (0, \bar{h}] .$$

次に

$$\beta_1 > 0, \quad \| \phi_h \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \beta_1 h | \Phi_h |^2_{L^2(\Gamma_0)} ,$$

$$\phi_h = \sum_{j=1}^{N_{1h}} \Phi_{N_{0h}+j} w_j, \qquad h \in (0, \overline{h}]$$

が示せるから　$\alpha = \beta_0^2 \beta_1$　として命題２が成立する。

標準的な方法で、中心差分解のL^2－安定性に関する次の定理４を得る。

<u>定理４.</u>　仮定（Ω）と（T）を要請する。近似空間の族V_hは（１４）によって定めるものとする。$\gamma \in (0,\ 1)$を固定して、$h \in (0,\ \overline{h}]$に対しては

$(S_{2\gamma})$　$\tau \leq (2\gamma / \sqrt{g\alpha}) \sqrt{h}$

が成立するように　$\tau > 0$　を選んで問題$(ALWW_{h,\tau})$の解$\Phi_{h,\tau,m}$を構成する。

$$\Phi_{h,\tau,m} = a_{h,\tau,m} \Phi_0 + \phi_{h,\tau,m}$$

$$\Phi^i_{h,\tau} = a^i_{h,\tau} \Phi_0 + \phi^i_{h,\tau} \qquad (i = 1,\ 0),$$

$$\Psi_{h,\tau,m} = b_{h,\tau,m} \Phi_0 + \phi_{h,\tau,m}$$

とおく。このとき、$n = 2,\ 3,\ \cdots$に対して

$$(17) \quad a_{h,\tau,n} = a^1_{h,\tau} + (n\tau) a^0_{h,\tau} + \sum_{j=0}^{m} (n - j) \tau b_{h,\tau,j} \tau,$$

$$|\phi_{h,\tau,n}| \leqq (1+\tau/\sqrt{1-\tau^2})\,|\phi^1_{h,\tau}|$$

$$(18) \qquad + (1/\sqrt{1-\tau^2})\,|A^{-1/2}_h \phi^0_{h,\tau}|$$

$$+ (m\tau/\sqrt{1-\tau^2}) \max_{0\leqq j\leqq m} |A^{-1/2}_h \phi_{h,\tau,j}|.$$

7．中心差分近似問題の収束性と誤差評価

定理5．　定理４の仮定の下で考える。（ALWW）の一般化された解を $\Phi(t)$ とし、$(\mathrm{ALWW}_{h,\tau})$ の解を $\Phi_{h,\tau,m}$ とする。

$\Phi^1, \Phi^0 \in X,\quad \Psi(t) \in C([0,T]:X)$

であり、

$\Phi^i_{h,\tau} = P_h \Phi^i \quad (i=0, 1),$

$\Psi_{h,\tau,m} = P_h \Psi(m\tau) \quad (m=0, 1, 2, ...)$

であるとする。このとき、

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\leqq m\tau\leqq T} |\Phi_{h,\tau,m} - \Phi(m\tau)| = 0$$

である。

定理6．　定理４の仮定に加えて、Gは性質（R）をもつものとする。

（ALWW）のデータ $\{\Phi^1, \Phi^0, \Psi\}$ が次の条件（I）をある $s \in [0, 1/2]$ に対してみたしているとする。

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\Phi^{i} \in D(A^{1+(i/2)+s}),\ i=1,\ 0, \\
\Psi(t) \in C^{2}([0,\ T],\ X), \\
\Psi^{(i)}(0) \in D(A^{(1-i)/2+s}),\ i=1,\ 0, \\
\Psi^{(2)}(t) \in D(A^{s}),\ 0 \leqq t \leqq T.
\end{cases}
$$

$$\Phi^{i} = a\,\Phi^{i}_{0} + \phi^{i} \quad (i=1,\ 0),$$

$$\Psi(t) = b(t)\,\Phi_{0} + \phi(t)$$

とおき、(ALWW) の解を$\Phi(t)$、($\mathrm{ALWW}_{h,\tau}$) の解を$\Phi_{h,\tau,m}$

とすると、$0 \leqq n\tau \leqq T$で

$$
\begin{aligned}
|\Phi(n\tau) - \Phi_{h,\tau,n}| \\
&\leqq (1+m\tau)\{h^{1+s} C E^{s}_{m\tau} + \tau^{2} M_{\gamma} E_{\tau,n}\} \\
&\quad + R_{\tau,m} + r_{\tau,n}
\end{aligned}
$$

なる評価が成立する。ここで、CとM_{γ}は $h \in (0,\ \overline{h}]$ とT＞0に

よらない定数である。M_{γ}はγとλ_{1}に依存する定数であり、

$$
\begin{aligned}
E^{s}_{t} &= |A^{(1/2)+s}\Psi(0)| \\
&\quad + |A^{(3/2)+s}\Phi^{1}| + |A^{1+s}\Phi^{0}| \\
&\quad + |A^{s}\Psi^{(1)}(0)| + t \max_{0 \leqq r \leqq t} |A^{s}\Psi^{(2)}(r)|,
\end{aligned}
$$

$$E_{\tau,m} = |A^{3/2}\Phi^{1}| + |A\Phi^{0}|$$

$$+ \left(n\tau + \left(1/\sqrt{g\lambda_{1}}\right)\right)\max_{0\leq r\leq n\tau}|\Psi^{(2)}(r)| ,$$

$$r_{\tau,n} = |a(n\tau) - a_{h,\tau,n}| ,$$

$$R_{\tau,m} = \left(1+\gamma/\sqrt{1-\gamma^{2}}\right)|P_{h}\phi^{1} - \phi^{1}_{h,\tau}|$$

$$+ \left(1/\sqrt{1-\gamma^{2}}\right)|\mathbf{A}_{h}^{-1/2}\{P_{h}\phi^{0}$$

$$+ (\tau/2)(-\mathbf{A}_{h}P_{h}\phi^{1} + P_{h}\phi(0)) - \phi^{0}_{h,\tau}\}|$$

$$+ \left(1/\sqrt{1-\gamma^{2}}\right)\max_{0\leq j\leq m}|\mathbf{A}_{h}^{-1/2}\{P_{h}\phi(j\tau) - \phi_{h,\tau,j}\}| ,$$

$$a(t) = a^{1} + t a^{0} + \int_{0}^{t}(t-r)\,b(r)\,dr ,$$

$a_{h,\tau,n}$ は 定理4の(17)において定められている。

<u>定理6の証明の方針</u>　以下の4問題を考える。

$$(\mathrm{ALWW}^{0})\quad \begin{cases} d^{2}\phi/dt^{2} + \mathbf{A}\phi = \phi , & t>0 , \\ \phi(0) = \phi^{1} , \quad (d\phi/dt)(0) = \phi^{0} . \end{cases}$$

$$(\mathrm{ALWW}^{0}_{h})\quad \begin{cases} d^{2}\phi_{h}/dt^{2} + \mathbf{A}_{h}\phi_{h} = P_{h}\phi , \\ \qquad\qquad t>0 , \\ \phi_{h}(0) = P_{h}\phi^{1} , \\ (d\phi_{h}/dt)(0) = P_{h}\phi^{0} . \end{cases}$$

$$
(\widetilde{ALWW}^{0}_{h,\tau})\begin{cases}
D_{\tau}\bar{D}_{\tau}\tilde{\phi}_{h,\tau,m} + \mathbf{A}_h\tilde{\phi}_{h,\tau,m} = P_h\psi(m\tau),\\
\tilde{\phi}_{h,\tau,0} = P_h\phi^{1},\\
D_{\tau}\phi_{h,\tau,0} = P_h\phi^{0}\\
\quad + (\tau/2)(-\mathbf{A}_h P_h\phi^{1} + P_h\psi(0)).
\end{cases}
$$

$$
(ALWW^{0}_{h,\tau})\begin{cases}
D_{\tau}\bar{D}_{\tau}\phi_{h,\tau} + \mathbf{A}_h\phi_{h,\tau} = \psi_h,\\
\phi_{h,\tau}(0) = \phi^{1}_{h,\tau},\\
D_{\tau}\phi_{h,\tau,0} = \phi^{0}_{h,\tau}.
\end{cases}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
&\Phi(n\tau) - \Phi_{h,\tau,n}\\
&= \Phi(n\tau) - \Phi_h(n\tau) + \Phi_h(n\tau) - \tilde{\Phi}_{h,\tau,n}\\
&\quad + \tilde{\Phi}_{h,\tau,n} - \Phi_{h,\tau,n}\\
&\qquad\qquad (\tilde{\Phi}_{h,\tau,n} = \tilde{\phi}_{h,\tau,n} + a(n\tau)\Phi_0)\\
&= (\phi(n\tau) - \phi_h(n\tau))\\
&\quad + (\phi_h(n\tau) + a(n\tau)\Phi_0 - \tilde{\phi}_{h,\tau,n} - a(n\tau)\Phi_0)\\
&\quad + (\tilde{\phi}_{h,\tau,n} + a(n\tau)\Phi_0 - \phi_{h,\tau,n} - a_{h,\tau,n}\Phi_0)
\end{aligned}
$$

したがって

$$\Phi(n\tau) - \Phi_{h,\tau,n}$$

$$= (\phi(n\tau) - \phi_h(n\tau)) + (\phi_h(n\tau) - \tilde{\phi}_{h,\tau,n})$$

$$+ (\tilde{\phi}_{h,\tau,n} - \phi_{h,\tau,n}) + (a(n\tau) - a_{h,\tau,n})\Phi_0$$

であるが

$$|\text{第一項}| = O(h^{1+s}) ,$$

$$|\text{第二項}| = O(\tau^2) ,$$

$$|\text{第三項}| \leqq R_{\tau,m} \quad (\text{定理1によって}) ,$$

$$|\text{第四項}| = r_{\tau,n} .$$

と評価される。

$\mathbf{A}_h$ が $\mathbf{A}$ のガレルキン近似ではなく、ある種の変分法違反によって定義されているため、評価のプロセスが複雑になっている。$\mathbf{A}_h$ が $\mathbf{A}$ のガレルキン近似として定義されているときは $(ALWW^0)$ と $(\widetilde{ALWW}^0_{h,\tau})$ とを直接に比較することが可能である。(例えば Raviart-Thomas[7] Chapitre 8 参照)

8．数値的検討

直方体領域：

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 0.55,\ -0.1 < z < 0\}$$

に対して、近似固有値問題：

$$(AE_h)\quad A_h\Phi_h = \lambda_h\Phi_h,$$

$$\{\lambda_h, \Phi_h\} \in \mathbb{R} \times (X_h - \{0\})$$

を数値計算し、$\| A_h \|_{L(X_h)}$、すなわち、A_h の最大固有値、を求め、評価（１６）の成立を確かめてみた。 この計算においては、

$$\Gamma_0 = \{ (x, y, 0) : 0 < x < 1, 0 < y < 0.55 \}$$

である。直方体の各辺をN等分（１≦N≦１４）し、ケース１では、フリードリックス・ケラー分割にもとづく区分一次連続要素を用い、ケース２では、かなえ一次直方体要素を用いた。（要素の命名法は昨年の報告[8] に従った。）本計算にあたっては（AE_h）に対応する弱形式問題を静的に縮約した一般固有値問題とし、修正コレスキー分解を用いた二分法により固有値を求め、逆反復法によって固有ベクトルを求めた。ＦＯＲＴＲＡＮ７７による倍精度計算で、電気通信大学情報処理センタＨＩＴＡＣ　Ｍ２６０－Ｄ（１≦Ｎ≦９）および東京大学大型計算機センタＨＩＴＡＣ　Ｍ６８０（１０≦Ｎ≦１４）によって実行した。

図１に、ケース１とケース２の場合のA_h の最大固有値とＮとの関係をプロットしたものを示す。ほぼＮに関して線形であり、評価（１６）と矛盾していないことがわかる。

図２と図３に、それぞれケース１とケース２の場合の第１固有値から第４固有値までの誤差を表示した。定理３の１の評価に対応する収束率が観察される。

図４には、ケース１の場合の固有ベクトルの収束状況をプロットした。定理３の２の評価に対応する収束率が観察される。

傾斜底水域：

$$\Omega = \{ (x, y, z) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 0.55,\ z = -0.1 + 0.08x \}$$

の場合にフリードリックス・ケラー分割を用いて、A_h の最大固有値を計算した。その値を図１に附加してある。このとき用いた正則な分割は次のようにして作った。次の二つの直方体Ω_0 とΩ_1 を考える。

$$\Omega_0 = \{ (x, y, z) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 0.55,\ -0.02 < z < 0 \},$$

$$\Omega_1 = \{ (x, y, z) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 0.55,\ -0.8 < z < -0.02 \}.$$

直方体Ω_0 の各辺をＮ等分してフリードリックス・ケラー分割による四面体分割を得る。直方体Ω_1 も同様にして四面体分割する。　ただし、　平面：$z = -0.1 + 0.08x$ でΩ_1 を二分したときに上に得られた四面体分割はこの二分された領域の四面体分割になっているようにした。Ω_0 とΩ_1 で得られた四面体分割をΩに制限したものを計算に使用した。

９．謝辞

本研究に際して、建設的な助言をいただいた電気通信大学渡辺二郎教授ならびに田端正久助教授に深く感謝申しあげます。

文献

[1] J.H.Bramble & J.E.Osborn, Approximation of Steklov Eigenvalues of Non-Selfadjoint Second Order Elliptic Operators, The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications in the Partial Differential Equations,(Ed. by K.Aziz), pp.387-408, Academic Press, New York, 1972.

[2] J. H. Bramble & J. E. Osborn, Rate of Convergence Estimates for Nonselfadjoint Eigenvalue Approximations, Math. of Comp., Vol.27, No.123, pp. 525-549 (1973).

[3] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Berlin, 1966.

[4] J.L.Lions & E.Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[5] J. Nečas, Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques Masson et Cie, Paris & Academia, Prague, 1967.

[6] J. J. Stoker, Water Waves, Interscience Publishers, New York, 1957.

[7] P. A. Raviart & J. M. Thomas, Introduction a l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, Masson, Paris, 1983.

[8] 牛島照夫, 四面体分割と離散調和作用素, 応用数学合同シンポジウム研究報告集, 昭和61年12月22日～24日, pp. 165-172.

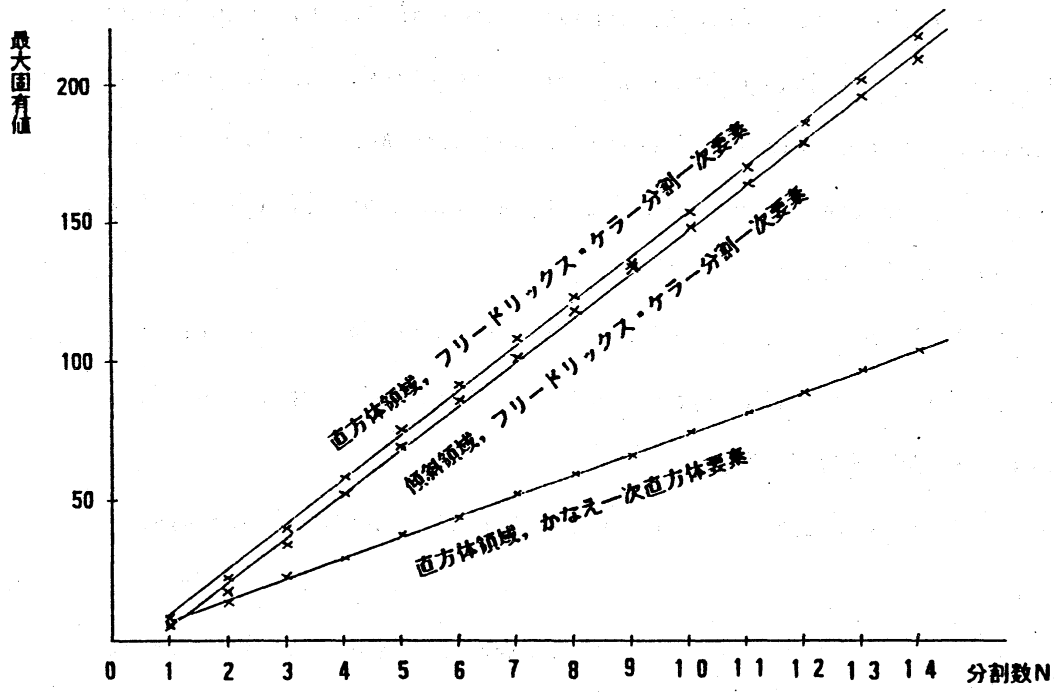

図1　最大固有値と分割数の関係

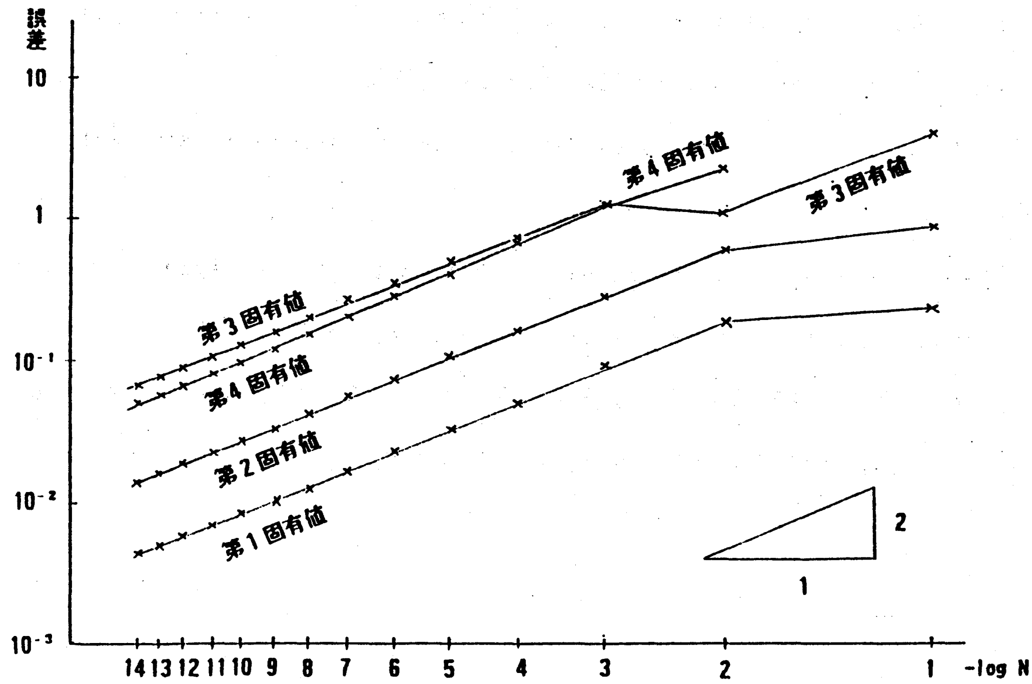

図2　直方体領域，フリードリックス・ケラー分割一次要素の固有値の収束

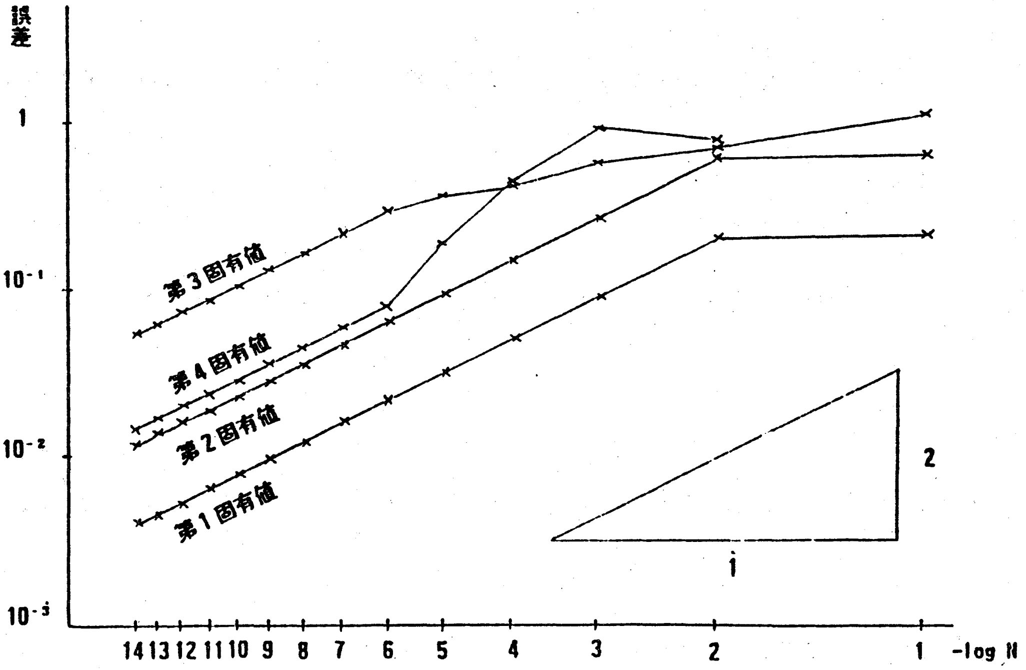

図3　直方体領域，かなえ一次直方体要素の固有値の収束

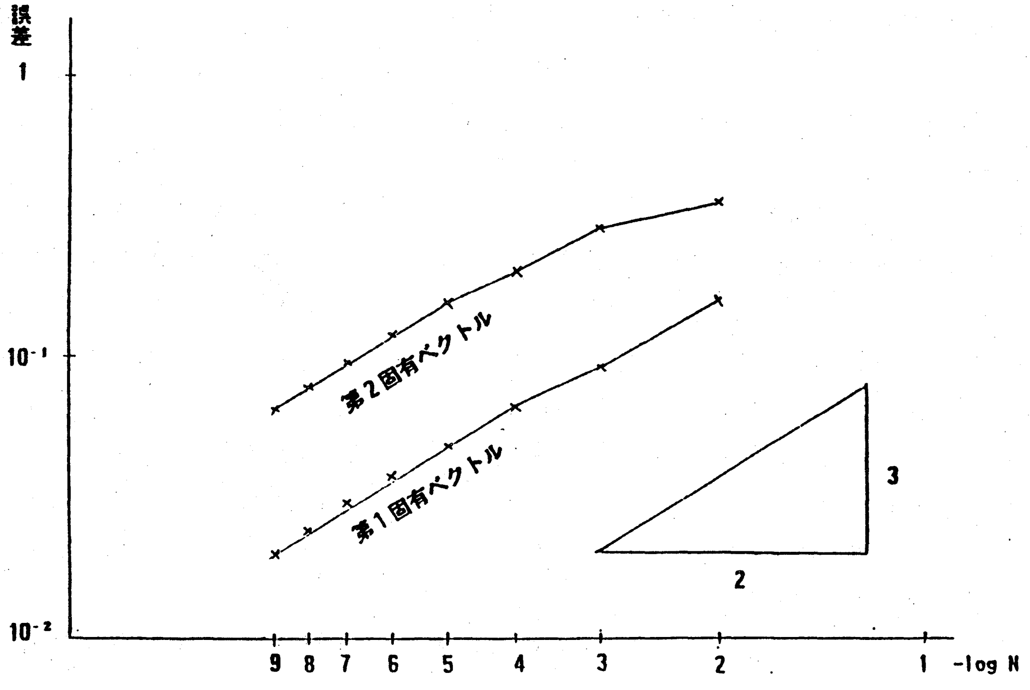

図4　直方体領域，フリードリックス・ケラー分割一次要素の固有ベクトルの収束